

# GIỚI THIỆU MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ ỨNG DỤNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

INTRODUCTION TO SOME PRACTICAL PROBLEMS APPLIED TO DERIVATIVE EQUATIONS

(Nguyễn Thuỳ Linh, Nguyễn Thu Hằng)\*

\*ThS. Trường Đại học Mở - Địa chất

Received: 24/6/2025; Accepted: 30/6/2025; Published: 5/7/2025

**Tóm tắt:** Bài báo phân tích các ứng dụng thực tiễn của phương trình vi phân cấp 1 trong các lĩnh vực như kinh tế, dân số, vật lý, y học. Thông qua các ví dụ minh họa cụ thể và dễ hiểu giúp sinh viên hình thành tư duy trực quan về phương trình vi phân cấp 1 trong thực tiễn và nghiên cứu khoa học và cho thấy tính liên ngành trong việc giải quyết các bài toán phức tạp.

**Từ khoá:** Phương trình vi phân cấp 1, mô hình toán, ứng dụng thực tiễn

**Abstract:** The article examines the practical uses of first-order differential equations in various fields, including economics, population studies, physics, and medicine. By providing clear and accessible examples, it aids student in developing an intuitive understanding of how first-order differential equations are applied in real-world scenarios and scientific research. Additionally, it shows interdisciplinary approach to solving complex problems

**Keywords:** first-order differential equations, mathematical modeling, applied mathematics

## 1. Đặt vấn đề

Từ thế kỷ XVII, phép tính vi phân và tích phân do Newton và Leibniz độc lập phát minh đã đặt nền móng cho ngành phương trình vi phân (PTVP). Sang thế kỷ XVIII–XIX, các nhà toán học như Bernoulli, Euler, Cauchy, Jacobi... tiếp tục hoàn thiện lý thuyết, phát triển phương pháp giải số và mở rộng ứng dụng trong cơ học, nhiệt động lực học, .... Đến thế kỷ XX, sự ra đời của các phương pháp giải số đã mở đường cho việc giải PTVP bằng máy tính, thúc đẩy ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như động lực học, sinh học, tài chính và kỹ thuật. Ngày nay, PTVP—đặc biệt là phương trình vi phân cấp 1 (PTVPC1) là công cụ quan trọng trong mô hình hóa các hiện tượng tự nhiên và xã hội.

PTVPC1 là một trong những nội dung quan trọng trong chương trình Toán học ở bậc đại học của hầu hết các ngành học, đặc biệt đối với các ngành kỹ thuật, kinh tế, ... Tuy nhiên, cách dạy thiên về lý thuyết khiến sinh viên khó tiếp cận, tiếp thu một cách máy móc, làm giảm khả năng vận dụng kiến thức vào thực tiễn cũng như liên kết với các môn chuyên ngành. Trước thực trạng đó, việc đổi mới phương pháp giảng dạy theo hướng tăng cường tính thực tiễn là cần thiết. Nhiều nhà toán học, các giảng viên đã nghiên cứu ứng dụng thực tiễn của PTVPC1 [3,4]. Theo luồng nghiên cứu đó, bài viết này tập hợp và giới thiệu một số bài toán ứng dụng PTVPC1 theo hướng gắn với thực tiễn, nhằm hỗ trợ sinh viên hiểu sâu lý thuyết, nâng cao năng lực giải quyết vấn đề và nhận thức rõ hơn vai trò của Toán học nói chung và PTVPC1 nói riêng trong thực tiễn và nghề nghiệp.

## 2. Nội dung nghiên cứu

### 2.1. Một số dạng phương trình vi phân cấp 1 thường gặp

**\*Định nghĩa:** Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình có dạng  $F(x, y, y') = 0$ , trong đó  $x$  là biến độc lập và  $y$  là hàm của  $x$  (là hàm cần tìm).

\*Một số phương trình vi phân cấp 1 cơ bản:

• Phương trình vi phân với biến số phân li:  $P(x)dx + Q(y)dy = 0$ .

• Phương trình thuần nhất:  $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ , trong đó  $P, Q$  là các hàm thuần nhất cùng bậc.

• Phương trình vi phân tuyến tính:  $y' + P(x)y = Q(x)$ .

• Phương trình Bernoulli:  $y' + P(x)y = y^\alpha Q(x)$ , trong đó  $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ .

• Phương trình vi phân toàn phần:  $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ , trong đó  $P(x,y), Q(x,y)$  là các hàm liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp 1 thỏa mãn điều kiện  $P'_y = Q'_x$ .

• Phương trình Lagrange:  $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ .

• Phương trình Clairaut:  $y = xy' + \psi(y')$ .

• Phương trình Riccati:  $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ , trong đó  $P, Q, R$  là các hàm liên tục.

Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm cũng như phương pháp giải các PTVPC1 nêu trên có thể xem trong [1]. Tiếp theo, chúng ta tìm hiểu một số ứng dụng thực tiễn của PTVPC1.

### 2.2. Ứng dụng của PTVPC1 trong một số lĩnh vực

#### 2.2.1. Trong mô hình tăng trưởng dân số

Để mô tả sự tăng trưởng dân số theo thời gian trong điều kiện tốc độ tăng trưởng dân số không đổi; không xét đến các yếu tố như hạn chế tài nguyên môi

trường, chính sách dân số,... chúng ta có thể sử dụng mô hình Malthus. Với  $P(t)$  là dân số tại thời điểm  $t$ ,  $r$  là tốc độ tăng trưởng dân số,  $t$  là thời gian ta có phương trình vi phân  $\frac{dP}{dt} = rP$  có nghiệm  $P(t) = Ce^{rt}$ .

*Ví dụ 2.1.* Dân số Hà Nội năm 2018 là 7,852 triệu người và năm 2023 là 8,587 triệu người (số liệu của Chi cục Dân số Hà Nội). Biết rằng tốc độ tăng trưởng dân số và quy mô dân số tỉ lệ với nhau. Dự đoán dân số Hà Nội năm 2024.

*Lời giải.* Tại thời điểm  $t$  (tính từ năm 2018) dân số là  $P(t) = Ce^{rt}$ .

Tại năm 2018,  $t = 0$  thì  $P(0) = 7,852$  (triệu người). Suy ra  $C = 7,852$ .

Đến năm 2023, dân số Hà Nội tăng lên là 8,587 (triệu người) tức là khi  $t = 5$  thì  $P(t) = 8,587$ . Do đó,  $8,587 = 7,852e^{r \cdot 5}$ . Nói cách khác,  $r \approx 0,0178$ .

Vậy  $P(t) = 7,852e^{0,0178t}$ .

Đến năm 2024, tức là  $t = 6$  thì

$P(6) = 7,852e^{0,0178 \cdot 6} \approx 8,737$  (triệu người).

*Nhận xét:*

- Dân số Hà Nội năm 2024 ghi nhận vào khoảng 8,7 triệu người. Kết quả này cho thấy dự báo từ mô hình Malthus tiệm cận khá sát với thực tiễn.

- Giảng viên có thể hướng dẫn sinh viên thu thập dữ liệu theo từng giai đoạn và áp dụng mô hình toán học để ước tính dân số ở một thời điểm tương lai.

- Khi các yếu tố bất ngờ như dịch bệnh, biến đổi khí hậu, đổi mới công nghệ,... xuất hiện thì độ chính xác của dự báo có thể bị ảnh hưởng.

### 2.2.2. Trong kinh tế

PTVPC1 có nhiều ứng dụng trong kinh tế (xem thêm [2]) để mô hình hóa nhiều bài toán toán như vay vốn ngân hàng, lãi suất ngân hàng, bảo hiểm, sự tăng (giảm) GDP hay bài toán xác định hàm doanh thu và hàm lợi nhuận,... Trong phần tiếp theo, chúng tôi đưa ra 3 ứng dụng gần gũi, dễ hiểu với sinh viên.

(1) *Mô hình tăng (giảm) GDP:* Gọi  $G(t)$  là tổng sản phẩm nội địa (GDP) của một địa phương tại thời điểm  $t$ . Biết  $r$  là tỷ lệ tăng trưởng GDP hằng năm ( $r < 0$  nếu GDP suy giảm). Khi đó, tốc độ thay đổi GDP được mô hình hoá bằng PTVPC1  $\frac{dG}{dt} = rG$ .

Đây là phương trình phân li có nghiệm là  $G(t) = Ce^{rt}$ .

*Ví dụ 2.2.* Trong giai đoạn 5 năm, một nền kinh tế ghi nhận mức gia tăng GDP từ 290 tỷ USD vào năm 2018 lên đến 420 tỷ USD vào cuối năm 2023.

a) Tính tốc độ tăng trưởng bình quân của nền kinh tế  $r$  trong khoảng thời gian trên. Từ đó dự đoán GDP năm 2024 (tốc độ phát triển không đổi).

b) Giả sử năm 2024 quốc gia phải đối mặt với biến động tài chính khiến GDP sụt giảm 1,8% so với

năm 2023. Dự đoán GDP vào năm 2025.

*Lời giải.* Gọi  $G(t)$  là GDP tại thời điểm  $t$  (tính từ năm 2018). Ta có  $P(t) = Ce^{rt}$ .

Tại năm 2018 thì  $t = 0$  nên  $G(0) = 290$  (tỷ USD). Suy ra,  $C = 290$ . Ta được  $G(t) = 290e^{rt}$ . GDP của năm 2023 là 420 tỷ USD nên ta có  $G(5) = 420$ .

Khi đó,  $420 = 290e^{r \cdot 5}$ . Giải ra ta được  $r \approx 0,074 > 0$ .

Đến năm 2024 thì  $t = 6$  nên ta được  $G(6) = 290e^{0,074 \cdot 6} \approx 452,09$  (tỷ USD).

Nếu năm 2024. GDP giảm 1,8% thì GDP thực tế trong năm 2024 là

$G = 452,09(1 - 0,018) = 443,95$  (tỷ USD).

Sau khủng hoảng kinh tế, GDP năm 2025 lại tăng trưởng như cũ với  $r \approx 0,074$ . Khi đó, GDP năm 2025 là  $G = 443,95 \cdot e^{0,074} \approx 478,048$  (tỷ USD).

(2) *Mô hình thu nhập quốc dân (Y)* theo thời gian do tác động của tiêu dùng ( $c$ ), lượng đầu tư ( $I$ ), chính sách chi tiêu chính phủ ( $G$ ) và thuế thu nhập ( $T$ ). là nghiệm của phương trình  $\frac{dY}{dt} = cY + I + G - T$ .

*Ví dụ 2.3.* Một quốc gia đang phát triển ghi nhận mức thu nhập quốc dân ban đầu đạt 600 tỷ USD. Dữ liệu cho thấy hệ số tiêu dùng cận biên  $c = 0,8$ , đầu tư  $I = 90$ , chi tiêu chính phủ  $G = 140$ , và thuế thu nhập  $T = 100$ . Giả sử các yếu tố trên không đổi, hãy dự báo thu nhập quốc dân của quốc gia sau 5 năm.

*Lời giải.* Ta có mô hình

$$\frac{dY}{dt} = cY + I + G - T = 0,8Y + 90 + 140 - 100.$$

Đây là phương trình tuyến tính, có nghiệm tổng quát là

$$Y(t) = \left( C + \int 130e^{(-0,8t)} dt \right) e^{0,8t} = Ce^{0,8t} - \frac{325}{2}.$$

Theo giả thiết  $Y_0 = 600$  nên  $C = \frac{1525}{2}$ . Ta được  $Y(t) = \frac{1525}{2}e^{0,8t} - \frac{325}{2}$ .

Sau 5 năm thu nhập quốc dân là

$$Y(5) = \frac{1525}{2}e^{0,8 \cdot 5} - \frac{325}{2} \approx 41468,59 (\text{USD}).$$

Mô hình hoàn trả khoản vay ngân hàng: Giả sử ban đầu vay ngân hàng  $B$  triệu đồng với lãi suất vay tính theo năm (liên tục) là  $r\%$ , tốc độ hoàn trả đều đặn là  $R$ . Khi đó, số dư nợ tại thời điểm  $t$  là  $B(t)$

thoả mãn  $\frac{dB}{dt} = r\%B(t) - R$ .

*Ví dụ 2.4.* Một khách hàng vay ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất là 10%/năm (lãi kép liên tục). Từ năm đầu tiên, khách hàng cam kết mỗi năm trả 30 triệu. Hỏi sau bao lâu khách hàng sẽ trả hết nợ?

*Lời giải.* Áp dụng mô hình với  $r\% = 10\%$ ,  $R = 30$ , ta được

$$\frac{dB}{dt} = 0,1B(t) - 30.$$

Phương trình có nghiệm

$$B = \left( C + \int -30e^{\int -0,1 dt} dt \right) \int e^{0,1t} = Ce^{0,1t} + 300.$$

Khách hàng vay 200 triệu đồng nên  $B(0) = 200$ . Khi đó  $C = -100$ .

Khi khách hàng trả hết nợ thì  $B(t) = 0$  Tức là  $300 - 100e^{0,1t} = 0$ .

Suy ra  $t \approx 10,98$  (năm). Vậy sau khoảng 11 năm khách hàng sẽ trả hết nợ.

**Chú ý:** Khi lãi suất ngân hàng thay đổi hàng năm hoặc khách hàng nâng mức chi trả hàng năm thì mô hình không còn đúng. Khi  $r$  tăng thì nợ sinh lãi nhiều hơn mỗi năm nên thời gian trả nợ sẽ dài hơn. Nếu  $R \leq rB(0)$  thì không thể trả hết nợ.

### 2.2.3. Trong vật lý

PTVPC1 có vai trò quan trọng và nhiều ứng dụng trong vật lý [3,4]. Ta sẽ xem xét ứng dụng về *mô hình dòng chảy Toricelli* (mô vận tốc dòng chất lỏng chảy khỏi bồn chứa): Chiều cao của chất lỏng tại thời điểm  $t$  là  $h(t)$ ,  $A$  là diện tích mặt thoáng (đỉnh bồn),  $a$  là diện tích lỗ thoát nước nhỏ ở đáy,  $g$  là gia tốc trọng trường. Khi đó sự thay đổi mực nước theo thời gian là  $\frac{dh}{dt} = -\frac{a}{A}\sqrt{2gh}$ .

**Ví dụ 2.5.** Một bồn nước hình trụ thẳng đứng có diện tích đáy là  $1m^2$ . Ở đáy bồn có gắn một van thoát nước nhỏ hình tròn có diện tích  $0,01m^2$ . Lúc 7h sáng, bồn nước chứa đầy nước với chiều cao  $1m$ . Khi mở van, nước bắt đầu chảy ra (không bơm thêm nước vào). Biết rằng tốc độ dòng nước chảy ra được tính theo công thức  $v = \sqrt{2gh}$  với  $g = 9,8m/s^2$ . Hỏi sau bao lâu bồn nước sẽ cạn nước?

**Lời giải.** Vận tốc dòng nước chảy ra tại lỗ thoát là  $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$ . Lượng nước thoát ra  $Q = av = a\sqrt{2gh(t)}$ . Tốc độ giảm thể tích trong bồn nước là  $\frac{dh}{dt} = -\frac{a}{A}\sqrt{2gh}$ . Thay các dữ kiện đề bài ta được  $\frac{dh}{dt} = -0,01\sqrt{19,6h}$ .

Đây là phương trình phân li có tích phân tổng quát là  $2\sqrt{h} = -0,01\sqrt{19,6t} + C$ .

Ban đầu bồn nước chứa đầy nước với chiều cao  $1m$  nên  $h(0) = 1$ . Thay vào ta được  $C = 2$ . Suy ra  $2\sqrt{h} = -0,01\sqrt{19,6t} + 2$ .

Khi bồn cạn nước thì  $h(t) = 0$  nên ứng với  $t = \frac{2}{0,01\sqrt{19,6}} \approx 45,17$ .

**Chú ý:** Bài toán bỏ qua yếu tố ma sát và lực cản

không khí.

### 2.2.4. Trong y học

(1) *Bài toán về sự thay đổi nồng độ thuốc:* PTVPC1 có thể mô tả sự thay đổi của nồng độ thuốc trong cơ thể theo thời gian. Điều này giúp bác sĩ, các chuyên gia xây dựng được phác đồ liều dùng phù hợp để hiệu quả điều trị tốt nhất.

Giả sử  $U(t)$  là hàm biểu thị nồng độ thuốc trong máu tại thời điểm  $t$ ,  $k$  là tốc độ đào thải của thuốc ra khỏi cơ thể. Khi đó, ta có mô hình đào thải thuốc sau khi dùng một liều duy nhất là  $\frac{dU}{dt} = -kU$ . Trong

trường hợp người bệnh uống thuốc đều đặn mỗi  $T$  giờ với liều lượng  $D(mg)$  thì sự thay đổi nồng độ thuốc trong máu được mô tả bởi phương trình  $\frac{dU}{dt} = -kU + \frac{D}{T}$ .

**Ví dụ 2.6.** Trong điều trị viêm hoặc sốt, bệnh nhân được chỉ định dùng *Ibuprofen* với liều lượng  $400mg$  và thời gian dùng thuốc cách nhau 6 giờ/lần. Biết rằng quá trình loại bỏ thuốc khỏi cơ thể diễn ra với hệ số đào thải  $k = 0,231$ . Tính nồng độ thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau 6 giờ uống liều thuốc đầu tiên và sau khi uống đủ 4 liều thuốc liên tiếp (mỗi liều cách nhau 6 giờ)?

**Lời giải.** Gọi  $U(t)$  là hàm biểu thị nồng độ thuốc trong máu tại thời điểm  $t$ . Nồng độ thuốc trong cơ thể người bệnh là  $\frac{dU}{dt} = -0,231U + \frac{400}{6}$ .

Đây là phương trình tuyến tính có nghiệm

$$U = \left( C + \int \frac{200}{3} e^{\int 0,231 dt} dt \right) e^{-\int 0,231 dt} = \frac{200000}{693} + Ce^{-0,231t}.$$

Nồng độ thuốc trong cơ thể người bệnh khi chưa uống thuốc ( $t = 0$ ) là  $U(0) = 0$  suy ra  $C = -\frac{200000}{693}$ .

Sau khi uống thuốc 6 giờ thì nồng độ thuốc trong cơ thể người bệnh là

$$U(6) = \frac{200000}{693} - \frac{200000}{693} e^{-0,231 \cdot 6} \approx 216,43 (mg / L).$$

Khi uống thuốc các lần tiếp theo, nồng độ thuốc trong cơ thể không về 0 mà vẫn còn một phần trước đó. Do đó, sau 4 lần uống thuốc ( $t = 24$ ) thì tổng nồng độ thuốc trong cơ thể bệnh nhân là  $U(24) = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$ , trong đó

$$U_n = U(6)e^{-0,231(n-1)T} + \frac{D}{0,231T} (1 - e^{-0,231(n-1)T}).$$

Suy ra,  $U(24) \approx 531,2mg / L$ .

(2) *Bài toán về sự lây lan bệnh truyền nhiễm:* Ta sử dụng mô hình SIR để mô tả sự lây lan của dịch bệnh truyền nhiễm. Từ đó sẽ ước lượng tốc độ lây

lan bệnh, dự đoán đỉnh dịch và đưa ra các biện pháp kịp thời (tiêm chủng, cách li,...).

Giả sử dân số không đổi và không xem xét đến biến động sinh tử. Với  $S(t)$  số người có thể bị lây nhiễm tại thời điểm  $t$ ;  $I(t)$  là số người đang bị nhiễm bệnh,  $R(t)$  là số người đã khỏi bệnh (hoặc miễn dịch);  $\beta > 0$  là hệ số lây truyền,  $\gamma$  là hệ số phục hồi. Tình hình dịch bệnh có thể mô tả bởi phương trình:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI; \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I; \frac{dR}{dt} = \gamma I.$$

**Ví dụ 2.7.** Một trường tiểu học có 500 học sinh. Ngày đầu tiên có 5 học sinh mắc bệnh cúm và 495 học sinh chưa mắc bệnh. Biết rằng mỗi ngày trung bình mỗi học sinh mắc cúm có thể lây bệnh cho 0,5 học sinh khác ( $\beta = 0,0005$ ) và sau 5 ngày sẽ có 1 học sinh khỏi bệnh ( $\gamma = 0,2$ ). Hãy dự đoán số học sinh mắc bệnh cúm sau 5 ngày.

**Lời giải.** Mô hình lây nhiễm bệnh cúm là  $\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$ .

Thay các dữ kiện thực tế thì

$$\frac{dI}{dt} = (0,0005 \cdot 495 - 0,2)I \text{ hay } \frac{dI}{dt} = 0,475I.$$

Giải phương trình ta được  $I = Ce^{0,475t}$ . Tại thời điểm ban đầu  $t = 0$  thì  $I(0) = 5$  nên  $C = 5$ . Số học sinh nhiễm bệnh sau 5 ngày  $I(5) = 5e^{0,475 \cdot 5} \approx 6,34$  (em).

Vậy 5 ngày trường sẽ có khoảng 6 học sinh mắc bệnh cúm.

**Nhận xét:** Mô hình chỉ đúng trong giai đoạn đầu của bệnh dịch khi chưa có biện pháp phòng dịch.

### 3. Kết luận

Bài báo trình bày một số ứng dụng thực tiễn của PTVPC1 trong các lĩnh vực cụ thể, góp phần làm phong phú hơn chuỗi ứng dụng của Toán học vào cuộc sống. Đồng thời, hỗ trợ SV củng cố kiến thức, phát triển năng lực vận dụng cũng như khơi gợi niềm yêu thích, làm tăng khả năng khám phá Toán học.

**Lời cảm ơn:** *Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Mở - Địa chất trong đề tài cấp cơ sở mã số T25-18.*

Tài liệu tham khảo

[1] P.T.Cường, H.N.Huân, P.N.Anh, L.B.Phượng, N.T.K.Son (2020), *Giáo trình Giải tích 2*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[2] N.Q.Huy (2021), “*Giới thiệu một số mô hình kinh tế áp dụng lý thuyết PTVP trong việc giảng dạy cho sinh viên khối ngành kinh tế tại Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật TP HCM*”, Tạp chí Khoa học giáo dục, Số 63, (04/2021), 1-10. Hà Nội

[3] Đ.V.Chung (2021), “*Ứng dụng thực tế của phương trình vi phân cấp 1*”, Tạp chí Dạy và học, số kì 2-2/2021. Hà Nội

[4] William F. Trench (2024), “*Elementary differential equations with boundary values problems*”, Trinity University.